1-1 مقدمة :

في هذا الفصل سوف نتحدث عن أنظمة الأعداد (Digital Systems) وهي :

1- النظام العشري (Decimal System)
2- النظام الثنائي (Binary System)
3- النظام الثماني (Octet System)
4- النظام الست عشري (Hexadecimal System)

والتحويل فيما بين هذه الأنظمة

كذلك سوف نتحدث عن بعض العمليات التي تتم على الأعداد الثنائية (Operations On Binary Numbers) وهي:

1- المتممة الأولى (One's Complement)
2- المتممة الثانية (Two's Complement)
3- الجمع والطرح (Adding & Subtraction)

1-2 أنظمة الأعداد Digital Systems :

System النظام	Digits الأعداد	Base الأساس
Decimal System النظام العشري	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9	10
Binary System النظام الثنائي	0,1	2
Octet System النظام الثماني	0,1,2,3,4,5,6,7	8
Hexadecimal System النظام الست عشري	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, A,B,C,D,E,F	16

1-3 التحويل بين أنظمة الأعداد Number Base Conversions :

1- من النظام الثنائي إلى النظام العشري From Binary To Decimal :

مثال :

حول العدد الثنائي التالي إلى النظام العشري :

$(1011)_2$

الحل :

$$(1011)_2 = 1*2^0 + 1*2^1 + 0*2^2 + 1*2^3$$
$$= 1 + 2 + 0 + 8$$
$$= (11)_{10}$$

الشرح :

في هذا المثال قمنا بتحويل العدد $(1011)_2$ من النظام الثنائي إلى النظام العشري وطريقة التحويل كالتالي :

نبدأ بأخذ الأعداد من اليمين إلى اليسار

أول عدد هو العدد (1) ونقوم بضربه في 2^0

ثم نأخذ العدد الثاني و هو العدد (1) ونضربه في 2^1

ثم نأخذ العدد الثالث و هو العدد (0) ونضربه في 2^2

وأخيراً نأخذ العدد الرابع والأخير و هو العدد (1) ونضربه في 2^3

بعد ذلك نقوم بجمع حاصل ضرب الأعداد السابقة

حاصل عملية الجمع يمثل العدد في النظام العشري =11

مثال :

حول العدد الثنائي التالي إلى النظام العشري :

$(110.1)_2$

الحل :

$$(110.1)_2 = 0*2^0 + 1*2^1 + 1*2^2 + 1*2^{-1}$$
$$= 0 + 2 + 4 + 0.5$$
$$= (6.5)_{10}$$

الشرح :

في هذا المثال العدد الثنائي مكوّن من جزئين الجزء الأول صحيح والجزء الثاني كسري
وعند التحويل نعامل كل جزء على احدا

العدد الصحيح نعمل معه كما تعلمنا في المثال السابق

أما العدد الكسري يختلف عن العدد الصحيح حيث نقوم بضربه في 2 مرفوعاً للأس السالب
نبدأ بأخذ الأعداد من اليسار إلى اليمين
وفي مثلنا لدينا فقط عدد واحد كسري و هو العدد (1) ونقوم بضربه في 2^{-1}
ثم نجمعه على العدد الصحيح الذي أوجدناه

أي أننا سوف نعامل العدد على أنه عدد واحد نقوم بضرب العدد الصحيح في العدد 2 مرفوعا للأسس..0,1,2,3,
والعدد الكسري مرفوعاً للأسس...-1,-2,-3 ثم نجمع العدد كاملاً

مثال :

حول العدد الثنائي التالي إلى النظام العشري :

$(1100.101)_2$

الحل :

$$(1100.101)_2 = 0*2^0 + 0*2^1 + 1*2^2 + 1*2^3 + 1*2^{-1} + 0*2^{-2} + 1*2^{-3}$$
$$= 0 + 0 + 4 + 8 + 0.5 + 0 + 0.125$$
$$= (12.625)_{10}$$

2- من النظام الثماني إلى النظام العشري From Octet To Decimal :

مثل طريقة تحويل العدد من النظام الثنائي إلى النظام العشري

ولكن الاختلاف فقط أننا سوف نضرب العدد الثماني في العدد (8) الذي يمثل أساس النظام المحول منه

مثال :

حول العدد الثماني التالي إلى النظام العشري :

$(752)_8$

الحل :

$$(752)_8 = 2*8^0 + 5*8^1 + 7*8^2$$
$$= 2 + 40 + 448$$
$$= (490)_{10}$$

مثال :

حول العدد الثماني التالي إلى النظام العشري :

$(35.6)_8$

الحل :

$$(35.6)_8 = 5*8^0 + 3*8^1 + 6*8^{-1}$$
$$= 5 + 24 + 0.75$$
$$= (29.75)_{10}$$

3- من النظام الست عشري إلى النظام العشري From Hexadecimal To Decimal :

لا تختلف طريقة التحويل من النظام الست عشري إلى النظام العشري عن التحويلات السابقة إلا فقط في الأساس الذي سوف نضرب فيه العدد الست عشري المراد تحويله و هو العدد (16)

مثال :

حول العدد الست عشري التالي إلى النظام العشري :

$(ABC)_{16}$

الحل :

$$(ABC)_{16} = 12*16^0 + 11*16^1 + 10*16^2$$
$$= 12 + 176 + 2560$$
$$= (2748)_{10}$$

مثال :

حول العدد الست عشري التالي إلى النظام العشري :

$(2F.8)_{16}$

الحل :

$$(2F.8)_{16} = 15*16^0 + 2*16^1 + 8*16^{-1}$$
$$= 15 + 32 + 0.5$$
$$= (47.5)_{10}$$

الخلاصة :

عند التحويل من أي نظام (الثنائي أو الثماني أو الست عشري) إلى النظام (العشري) فإننا نضرب العدد المراد تحويله في أساس نظامه المحول منه

4- من النظام العشري إلى النظام الثنائي From Decimal To Binary :

مثال :

حول العدد العشري التالي إلى النظام الثنائي :

$(59)_{10}$

الحل :

2	
59	
29	1
14	1
7	0
3	1
1	1
0	1

$(59)_{10} = (111011)_2$

الشرح :

في هذا المثال قمنا بتحويل العدد 59 من النظام العشري إلى الثنائي والطريقة هي :
قسمة العدد العشري المراد تحويله على أساس النظام المحول إليه

حيث قمنا بقسمة العدد (59) على أساس النظام المحول إليه وهو العدد 2 نتج عن عملية القسمة العدد (29.5)

ولكن نحن نريد عدد صحيح فقط بدون كسور
ثم نقوم بضرب العدد الكسري الناتج عن عملية القسمة (0.5) في أساس النظام المحول إليه وهو العدد 2
ينتج عن عملية الضرب العدد (1) ويعتبر أول باقي عملية القسمة ويكتب في الطرف الثاني على يمين الأعداد

بعد ذلك نقوم بقسمة ناتج عملية القسمة الأولى وهو العدد 29 على 2
وهكذا نعمل مع باقي نواتج عمليات القسمة إلى أن نصل إلى أن يكون ناتج القسمة = 0 والباقي = 1
بواقي عمليات القسمة وهو العدد (111011) يمثل العدد 59 في النظام العشري

توجد بعض الملاحظات التي لابد أن نراعيها أثناء عملية التحويل وهي :
1- لو كان ناتج عملية القسمة عدد صحيح بدون كسور كما حدث في مثالنا السابق حيث كان
$14 / 2 = 7$ ولا يوجد باقي, عندها إذن يكون الباقي = 0
2- عند كتابة ناتج عملية التحويل يكتب العدد من الأسفل إلى الأعلى

مثال :

حول العدد العشري التالي إلى النظام الثنائي :

$(0.78125)_{10}$

الحل :

$0.78125 \ * 2 = 1.5625 \rightarrow 1$
$0.5625 \ * 2 = 1.125 \rightarrow 1$
$0.125 \ * 2 = 0.25 \rightarrow 0$
$0.25 \ * 2 = 0.5 \rightarrow 0$
$0.5 \ * 2 = 1 \rightarrow 1$

$$(0.78125)_{10} = (0.11001)_2$$

الشرح :

في هذا المثال قمنا بتحويل العدد (0.78125) من النظام العشري إلى النظام الثنائي طريقة التحويل هي كالآتي :
كما تلاحظ عزيزي القارئ أن العدد العشري عدد كسري وليس صحيح
عند تحويل العدد الكسري نقوم بضربه في أساس النظام المحول إليه وهو العدد 2
العدد العشري المراد تحويله هو العدد (0.78125) نقوم بضربه في العدد 2
ينتج عن عملية الضرب العدد (1.5625)
نأخذ الجزء الصحيح وهو العدد (1) ويعتبر أول عدد ناتج عن عملية التحويل
ويتبقى الجزء الكسري وهو العدد (0.5623) ونكرر معه الخطوات السابقة
إلى أن نصل أن يكون ناتج عملية الضرب عدد صحيح فقط بدون كسور ٍ عندها تكون قد انتهت عملية التحويل

توجد بعض الملاحظات التي لابد أن نراعيها أثناء عملية التحويل وهي :
1- عند كتابة ناتج عملية التحويل يكتب العدد من الأعلى إلى الأسفل
عكس طريقة كتابة تحويل العدد الصحيح
2- نكتب العدد الناتج بعد الفاصلة لأن العدد الذي قمنا بتحويله عدد كسري ولابد من أن يكون العدد بعد التحويل عدد كسري وكما نعلم أن العدد الكسري يكتب بعد الفاصلة

مثال :

حول العدد العشري التالي إلى النظام الثنائي :

$(35.375)_{10}$

الحل :

هذا العدد مكوّن من جزئين جزء صحيح والآخر كسري وعند تحويله إلى النظام الثنائي
نعامل كل جزء على حدا
أي نأخذ الجزء الصحيح ونحوله ثم نأخذ الجزء الكسري ونحوله ثم نكتب العدد كاملاً

$0.375 \ * 2 = 0.75 \rightarrow 0$
$0.75 \ * 2 = 1.5 \rightarrow 1$
$0.5 \ * 2 = 1 \rightarrow 1$
(0.011)

2	
35	
17	1
8	1
4	0
2	0
1	0
0	1

(100011)

$$(35.375)_{10} = (100011.011)_2$$

5- من النظام العشري إلى النظام الثماني From Decimal To Octet :

مثال :

حول العدد العشري التالي إلى النظام الثماني :

$(153.6875)_{10}$

الحل :

	8
153	
19	1
2	3
0	2

(231) ↑

$$0.6875 * 8 = 5.5 \rightarrow 5$$
$$0.5 * 8 = 4 \rightarrow 4$$

(0.54) ↓

$$(153.6875)_{10} = (231.54)_8$$

الشرح :

لا تختلف طريقة التحويل العدد من النظام العشري إلى النظام الثماني عن طريقة تحوليه إلى النظام الثنائي
سواءً كان العدد صحيح أم كسري ولكن الاختلاف فقط
في الأساس الذي نقسم أو نضرب العدد العشري فيه وهو العدد 8

توجد نقطة مهمة سبق وأن تحدثنا عنها في طريقة تحويل العدد العشري الصحيح إلى النظام الثنائي
وهي إيجاد الباقي
عند قسمة العدد (153) على العدد 8 ينتج عن عملية القسمة العدد (19.125)
نأخذ الجزء الكسري وهو العدد (0.125) ونضربه في العدد 8 ينتج عن عملية الضرب العدد (1)
ويعتبر العدد (1) هو باقي عملية القسمة
ثم نكمل خطوات التحويل كما تعلمنا في الأمثلة السابقة
وتنتهي عملية التحويل عندما يكون ناتج القسمة = 0 والباقي = عدد صحيح أصغر من العدد 8

بعد ذلك ننتقل للجزء الكسري
وطريقة تحويله إلى النظام الثماني هي نفس طريقة تحويله إلى النظام الثنائي
مع اختلاف الأساس الذي نضرب فيه العدد العشري الكسري وهو العدد 8
وتنتهي عملية التحويل عندما يصبح الناتج = عدد صحيح

5- من النظام العشري إلى النظام الثماني From Decimal To Octet :

مثال :

حول العدد العشري التالي إلى النظام الثماني :

$(153.6875)_{10}$

الحل :

```
   8
153|
 19| 1   ↑
  2| 3   |
  0| 2   |
(231)
```

```
0.6875  * 8 =  5.5  → 5   ↓
0.5     * 8 =  4    → 4
          (0.54)
```

$(153.6875)_{10} = (231.54)_8$

الشرح :

لا تختلف طريقة التحويل العدد من النظام العشري إلى النظام الثماني عن طريقة تحوليه إلى النظام الثنائي سواءً كان العدد صحيح أم كسري ولكن الاختلاف فقط

في الأساس الذي نقسم أو نضرب العدد العشري فيه وهو العدد 8

توجد نقطة مهمة سبق وأن تحدثنا عنها في طريقة تحويل العدد العشري الصحيح إلى النظام الثنائي وهي إيجاد الباقي

عند قسمة العدد (153) على العدد 8 ينتج عن عملية القسمة العدد (19.125)

نأخذ الجزء الكسري وهو العدد (0.125) ونضربه في العدد 8 ينتج عن عملية الضرب العدد (1)

ويعتبر العدد (1) هو باقي عملية القسمة

ثم نكمل خطوات التحويل كما تعلمنا في الأمثلة السابقة

وتنتهي عملية التحويل عندما يكون ناتج القسمة = 0 والباقي = عدد صحيح أصغر من العدد 8

بعد ذلك ننتقل للجزء الكسري

وطريقة تحويله إلى النظام الثماني هي نفس طريقة تحويله إلى النظام الثنائي

مع اختلاف الأساس الذي نضرب فيه العدد العشري الكسري وهو العدد 8

وتنتهي عملية التحويل عندما يصبح الناتج = عدد صحيح

7- من النظام الثنائي إلى النظام الثماني From Binary To Octet :

التحويل من النظام الثنائي إلى النظام الثماني يعتمد على الجدول التالي :

0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

مثال :

حول العدد الثنائي التالي إلى النظام الثماني :

$(10011101110)_2$

الحل :

010	011	101	110
2	3	5	6

$(10011101110)_2 = (2356)_8$

الشرح :

عند التحويل من النظام الثنائي إلى النظام الثماني نقوم بأخذ كل 3 أعداد ثنائية من جهة اليمين
لماذا نبدأ بأخذ الأعداد من جهة اليمين ولم نبدأ بأخذها من جهة اليسار ؟
وذلك لأنه في بعض الأحيان يتبقى عدد ثنائي بمفرده دون الثاني والثالث
أو عددين ثنائيين بمفردهما دون الثالث
عندها نقوم نحن بتكملة الأعداد الناقصة بإضافة أصفار لها وذلك لكي تصبح مكوّنة من 3 أعداد
كما فعلنا في المثال حيث أضفنا العدد (0) على آخر عددين وهما (01) وأصبح العدد = (010)
وكما نعلم أن الصفر في خانة اليسار ليس له قيمة كما في المثال التالي :

(1) = (001)

أما لو كنا نأخذ الأعداد من جهة اليمين فعندما نريد تكملة الأعداد الناقصة
سوف نضيف الصفر من جهة اليمين وبذلك يصبح للصفر قيمة وبالتالي يختلف العدد تماماً
كما في المثال التالي :

$(1) \neq (100)$

وبالتالي نكون قد قسمنا العدد الثنائي إلى عدة أقسام كل قسم مكوّن من 3 أعداد
ثم نضع قيمة العدد الثماني المقابل لكل 3 أعداد ثنائية وذلك من خلال الجدول

مثال :

حول العدد الثنائي التالي إلى النظام الثماني :

$(.0101111)_2$

الحل :

010	111	100
2	7	4

$(.0101111)_2 = (.274)$

الشرح :

في هذا المثال العدد الثنائي المراد تحويله عدد كسري
والفرق بين تحويل العدد الثنائي الكسري عن العدد الثنائي الصحيح
أننا في الصحيح نأخذ كل 3 أعداد ثنائية من جهة اليمين ونضيف الأصفار على العدد من جهة اليسار

أما في العدد الكسري فإننا نعمل العكس تماماً
نأخذ كل 3 أعداد ثنائية من جهة اليسار (أول عدد بعد الفاصلة)
ونضيف الأصفار لتكملة العدد من جهة اليمين .. لماذا ؟ أدع الإجابة لك عزيزي القارئ

ثم نكمل باقي خطوات الحل كما تعلمنا في المثال السابق

مثال :

حول العدد الثنائي التالي إلى النظام الثماني :

$(11001.01)_2$

الحل :

011	001	.010
3	1	2

$(11001.01)_2 = (31.2)_8$

الشرح :

في هذا المثال العدد الثنائي مكوّن من جزئين جزء صحيح والآخر كسري
ونعامل كل جزء كما تعلمنا في الأمثلة السابقة

8- من النظام الثماني إلى النظام الثنائي From Octet To Binary :

التحويل من النظام الثماني إلى النظام الثنائي هو عملية عكسية للتحويل من النظام الثنائي إلى الثماني

أي أننا سوف نعتمد على الجدول السابق ونطبق نفس الخطوات السابقة سواءً كان العدد صحيح أو كسري

مثال :

حول العدد الثماني التالي إلى النظام الثنائي :

$(62.7)_8$

الحل :

$(62.7)_8 = (110\ 010\ .\ 111)_2$

مثال :

حول العدد الثماني التالي إلى النظام الثنائي :

$(35.41)_8$

الحل :

$(35.41)_8 = (011\ 101\ .\ 100\ \ 001)$

9- من النظام الثنائي إلى النظام الست عشري From Binary To Hexadecimal :

هي نفس طريقة التحويل من النظام الثنائي إلى النظام الثماني
ولكن الاختلاف فقط أن كل عدد ست عشري يكافئ 4 أعداد ثنائية معتمدين على الجدول التالي :

0	0000	8	1000
1	0001	9	1001
2	0010	A	1010
3	0011	B	1011
4	0100	C	1100
5	0101	D	1101
6	0110	E	1110
7	0111	F	1111

مثال :
حول العدد الثنائي التالي إلى النظام الست عشري :
$(0010\ 1110.\ 1010)_2$
الحل :
$(0010\ 1110.1010)_2 = (2E.A)_{16}$

مثال :
حول العدد الثنائي التالي إلى النظام الست عشري :
$(1111\ \ 1100.\ 0101\ 1011)_2$
الحل :
$(1111\ \ 1100.\ 0101\ 1011)_2 = (FC.5B)_{16}$

10- من النظام الست عشري إلى النظام الثنائي From Hexadecimal To Binary :

مثال :

حول العدد الست عشري التالي إلى النظام الثنائي :

$(AB.6D)_{16}$

الحل :

$(AB.6D)_{16} = (1010\ 1011.0110\ 1101)_2$

مثال :

حول العدد الست عشري التالي إلى النظام الثنائي :

$(9C.8F3)_{16}$

الحل :

$(9C.8F3)_{16} = (1001\ 1100.1000\ 1111\ 0011)_2$

1-4 العمليات على الأعداد الثنائية Operations On Binary Numbers :

1- المتممة الأولى One's Complement :

تتم هذه العملية بتغيير كل 0 إلى 1 والعكس على الرقم الثنائي بأكمله

مثال :
أوجد المتممة الأولى للعدد الثنائي التالي :
$(1100101001)_2$
الحل :
المتممة الأولى = 0011010110

مثال :
أوجد المتممة الأولى للعدد الثنائي التالي :
$(10000000000)_2$
الحل :
المتممة الأولى = 01111111111

2- المتممة الثانية Two's Complement :

هذه العملية من أهم العمليات للتي تتم على الأعداد الثنائية ومن خلالها نستطيع أن نقوم بعملية طرح الأعداد الثنائية وغيرها من العمليات
المتممة الثانية تقوم بتحويل العدد السالب إلى عدد موجب والعكس وبالتالي نستطيع إجراء عملية الجمع على الأعداد الثنائية إذا قمنا بتحويلها إلى موجبة

يتم إيجاد المتممة الثانية بإحدى الطريقتين :

الطريقة الأولى :

وذلك بأن توجد المتممة الأولى للعدد الثنائي ثم نجمع القيمة (1) على المتممة الأولى

مثال :

أوجد المتممة الثانية للعدد الثنائي التالي :

$(1100101001)_2$

الحل :

أولا : نوجد المتممة الأولى = 0011010110

ثانيا : نقوم بجمع القيمة 1 على المتممة الأولى

$$\begin{array}{r} 0011010110 \\ 1+ \\ \hline 0011010111 \end{array}$$

المتممة الثانية = 0011010111

مثال :

أوجد المتممة الثانية للعدد الثنائي التالي :

$(1111000000)_2$

الحل :

المتممة الأولى = 0000111111

$$\begin{array}{r} 0000111111 \\ 1+ \\ \hline 0001000000 \end{array}$$

المتممة الثانية = 0001000000

الطريقة الثانية:

هذه الطريقة أسهل وأفضل من الطريقة السابقة ولا نحتاج أن نوجد المتممة الأولى للعدد الثنائي وإنما يتم إيجادها بالشكل التالي :

ننظر في العدد الثنائي ونكتبه في الناتج كما هو إلى أن نصل إلى أول رقم 1 في العدد نقوم بكاتبته في الناتج كما هو ثم من بعد هذا العدد نقوم بتغيير كل عدد بعده من 0 إلى 1 ومن 1 إلى 0

سوف نقوم بإيجاد المتممة الثانية للأمثلة السابقة بهذه الطريقة

مثال :

أوجد المتممة الثانية للعدد الثنائي التالي :

$(1100101001)_2$

الحل :

$$\frac{1100101001}{0011010111}$$

المتممة الثانية = 0011010111

الشرح :

في هذا المثال قمنا بإيجاد المتممة الثانية للعدد الثنائي السابق ولأن أول رقم في العدد الثنائي 1 قمنا بكتابته في الناتج كما هو وقمنا بتغيير كل عدد بعده من 0 إلى 1 ومن 1 إلى 0

مثال :

أوجد المتممة الثانية للعدد الثنائي التالي :

$(1111000000)_2$

الحل :

$$\frac{1111000000}{0001000000}$$

المتممة الثانية = 0001000000

الشرح :

قمنا بكتابة أول ستة أرقام في الناتج كما هي إلى أن وصلنا للرقم السابع وهو أول رقم 1 في العدد قمنا بكتابته في الناتج كما هو وغيرنا باقي العدد من بعده من 0 إلى 1 ومن 1 إلى 0

3- الجمع والطرح Adding & Subtraction :

في هذه الجزئية لن نتحدث عن عملية الجمع وإنما سوف نتحدث فقط عن عملية الطرح
وذلك لأن عملية الطرح في الأساس ماهي إلا عملية جمع عدد موجب مع عدد سالب

في النظام الثنائي لا يمكن إجراء عملية الطرح مباشرةً كما نفعل في النظام العشري
بل نقوم بتحويل عملية الطرح إلى عملية جمع وذلك باستخدام المتممة الثانية

مثال :
أجري عملية الطرح التالية :
1101 - 0100
الحل :

1101
0100 −

نأتي بالمتممة الثانية للعدد السالب →

1101
1100 +

نجمع →

11
1101
1100 +
~~1~~1001

1101 - 1100 = +1001

الشرح :

في هذا المثال قمنا بإجراء عملية الطرح على عددين ثنائيين

العدد الأول وهو العدد (1101) عدد موجب لذلك نبقيه كما هو
أما العدد الثاني وهو العدد (0100) عدد سالب
إذن نوجد المتممة الثانية له لكي نحوله إلى عدد موجب
المتممة الثانية للعدد (0100) = (1100)
بعد ذلك نقوم بعملية الجمع العدد الأول (1101) والعدد الثاني بعد إيجاد المتممة الثانية له (1100)
1101 + 1100 = 11001
كما تلاحظ عزيزي القارئ أن ناتج عملية الجمع وهو العدد (11001) يوجد به (Overflow)
وذلك لأن العدد الأول يمثل في 4 بايت
والعدد الثاني كذلك يمثل في 4 بايت
أما الناتج فإنه يمثل في 5 بايت

نحن نريد أيضاً الناتج يمثل في 4 بايت
لذلك نقوم بحذف آخر عدد من الناتج ~~1~~1001 ونضع أمام الناتج إشارة +

مثال :

أجري عملية الطرح التالية :

0110 - 1100

الحل:

0110 1100 −	نأتي بالمتممة الثانية للعدد السالب →	0110 0100 +	نجمع →	1 0110 0100 + 1010

0110 - 1100 = -0110

الشرح:

في هذا المثال الناتج لا يوجد به Overflow لذلك نقوم بإيجاد المتممة الثانية للناتج ونضع أمامه إشارة -

الخلاصة :

إذا وجد في الناتج Overflow نحذف آخر عدد من الناتج ونضع إشارة +

إذا لم يوجد في الناتج Overflow نأتي بالمتممة الثانية للناتج ونضع إشارة –

2-1 مقدمة :

في هذا الفصل سوف نتحدث عن الدوال (Functions) وكيفية تبسيطها بواسطة الجبر البوليني (Boolean Algebra) ولكن لن نتعمق في تبسيط الدول بهذه الطريقة لأن هنالك طريقة أسهل وأوضح تدعى Karnaugh Map سوف نتعرف عليها في الفصل الثالث بإذن الله تعالى
كما سوف نتحدث عن كيفية رسم الدوال
وكذلك سوف نتحدث عن روابط (AND , OR , NOT…..) أشكالها وعملها
وأيضاً سوف نتحدث عن Minterms و Maxterms وكيفية إيجادها

2-2 المنطق الثنائي Binary Logic :

الجدول التالي يوضح أهم الروابط المستخدمة لإنشاء الدوال (Functions) ويوضح أيضاً (Truth Table) لها :

		AND	OR	NOT	
X	Y	X .Y	X + Y	X	Y
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0

2-3 القواعد Grammars :

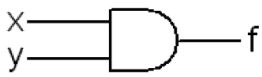
OR	
1	x+1 = 1
2	x+x' = 1
3	x+x = x
4	x+0 = x
5	(x')' = x
6	x+y = y+x
7	x+(y+z) = (x+y)+z
8	x.(y+z) = x.y+x.z
9	(x+y)' = x'.y'
10	x+(x.y) = x

AND	
1	x.1 = x
2	x.x' = 0
3	x.x = x
4	x.0 = 0
5	(x')' = x
6	x.y = y.x
7	x.(y.z) = (x.y).z
8	x+y.z = (x+y).(x+z)
9	(x.y)' = x'+y'
10	x.(x+y) = x

هذه القواعد مهمة ونحتاجها لتبسيط الدوال (Functions) بواسطة الجبر البوليني (Boolean Algebra)
وأهم هذه القواعد القاعدة 9 وهي ما تعرف بقاعدة (De Morgan)

4-5 Logic Gates :

الجدول التالي يوضح أشكال الروابط بالرسم وذلك لكي نتمكن من تمثيل الدوال بالرسم :

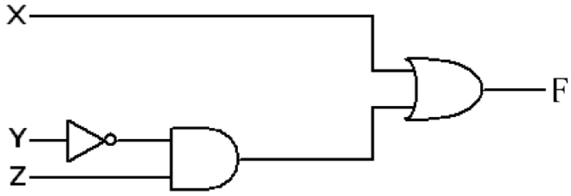
Name	Graphic Symbol	Algebraic Function
AND		F = xy
OR		F = x+y
Inverter		F = x'

مثال :

أرسم الدالة التالية :

$$F = x + y'z$$

الحل :

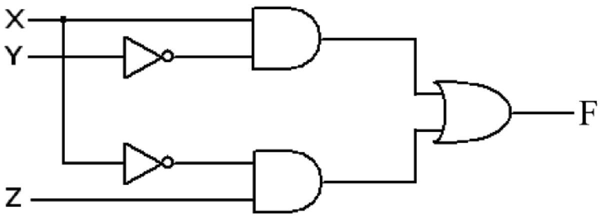


مثال:

أرسم الدالة التالية :

$F = xy' + x'z$

الحل:



مثال:

بسط الدوال المنطقية التالية Simplify the following Boolean functions :

1- $x(x' + y)$

2- $x + x'y$

3- $(x + y).(x + y')$

4- $xy + x'z + yz$

الحل:

سوف نقوم بتبسيط هذه الدوال بطريقة الجبر البوليني (Boolean Algebra) معتمدين على قواعد الروابط AND و OR

1- $x(x' + y) = xx' + xy$ $= 0 + xy$ $= xy$	2- $x + x'y = (x+x').(x+y)$ $= 1 .(x+y)$ $= x + y$
3- $(x+y)(x+y') = x(x+y') + y(x+y')$ $= xx + xy' + xy + yy'$ $= x+xy' +xy +0$ $= x(1+y'+y)$ $= x1$ $= x$	4- $xy + x'z + yz = xy + x'z + yz.(x+x')$ $= xy + x'z + xyz + x'yz$ $= xy(1+z) + x'z(1+y)$ $=xy +x'z$

2-5 متممة الدالة Complement Of a Function :

لإيجاد متممة الدالة يجب علينا إستخدام قواعد (De Morgan) وهي :

$$(A + B + C + D)' = A'B'C'D'$$
$$(ABCD)' = A' + B' + C' + D'$$

تتم هذه القاعدة بنفي الدالة كاملة وعند نفيها يحدث ما يلي :

1- تتحول الروابط بين عناصر الدالة من AND إلى OR والعكس

2- كل عنصر غير منفي يصبح منفي والعكس

مثال:

أوجد متممة الدالة التالية find the complement of the following functions :

$$F1 = x'yz' + x'y'z$$

الحل:

$$F1 = (x'yz' + x'y'z)'$$
$$= (x'yz')' . (x'y'z)'$$
$$= (x+y'+z) . (x+y+z')$$

الشرح:

كما تلاحظ عزيزي القارئ أن المثال مكوّن من حدين

خطوات الحل كالتالي :

1- تغيير الرابط بين الحدين من OR إلى AND

2- نفي كل حد على احدا

3- تغيير الروابط بين عناصر كل حد من AND إلى OR

4- نفي كل عنصر مثبت وإثبات كل عنصر منفي

مثال:

أوجد متممة الدالة التالية find the complement of the following functions :

$$F1 = (x+y'+z').(x'+y+z).(x'+y'+z')$$

الحل:

$$F1 = ((x+y'+z').(x'+y+z).(x'+y'+z'))'$$
$$=(x+y'+z')' + (x'+y+z)' + (x'+y'+z')'$$
$$= (x'yz) + (xy'z') + (xyz)$$

Canonical And Standard Forms 2-6

الجدول التالي يوضح كيفية كتابة (Truth Table) لـ (X,Y,Z) بواسطة Minterms و Maxterms :

			Minterms		Maxterms	
X	Y	Z	Term	Deaignation	Term	Deaignation
0	0	0	x'y'z'	m0	x+y+z	M0
0	0	1	x'y'z	m1	x+y+z'	M1
0	1	0	x'yz'	m2	x+y'+z	M2
0	1	1	x'yz	m3	x+y'+z'	M3
1	0	0	xy'z'	m4	x'+y+z	M4
1	0	1	xy'z	m5	x'+y+z'	M5
1	1	0	xyz'	m6	x'+y'+z	M6
1	1	1	xyz	m7	x'+y'+z'	M7

الجدول التالي يقارن بين Minterms و Maxterms :

Maxterms	Minterms	
الرابط (OR) هوالذي يربط بين عناصر الدالة	الرابط (AND) هوالذي يربط بين عناصر الدالة	1
عند كتابة عناصر الدالة يكتب المثبت منفي والمنفي مثبت كما هو موضح في الجدول مثال من الجدول (010) كتبت (x+y'+z) أي قمنا بقلب كل 0 إلى 1 والعكس	عند كتابة عناصر الدالة يكتب المثبت مثبت والمنفي منفي كما هو موضح في الجدول مثال من الجدول (010) كتبت (x'yz') أي لم نقم بأي تغيير أثناء كتابتها	2
يمثل قيمة الدالة عندما تكون قيمة الدالة = 0	يمثل قيمة الدالة عندما تكون قيمة الدالة = 1	3

مثال :

أوجد Sum Of Products و Products Of Sum لدوال الجدول التالي :

X	Y	Z	F1	F2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

الحل :

Sum Of Products ⇔ Minterms

Products Of Sum ⇔ Maxterms

(جمع كميات مضروبة) Sum Of Products :

$$F1 = x'y'z + xy'z' + xyz = m1 + m4 + m7 \rightarrow \Sigma(1,4,7)$$

$$F2 = x'yz + xy'z + xyz' + xyz = m3 + m5 + m6 + m7 \rightarrow \Sigma(3,5,6,7)$$

(ضرب كميات مجموعة) Products Of Sum :

$$F1 = (x+y+z)(x+y'+z)(x+y'+z')(x'+y+z')(x'+y+'z) = M0.M2.M3.M5.M6 \rightarrow \prod(0,2,3,5,6)$$

$$F2 = (x+y+z)(x+y+z')(x+y'+z)(x'+y+z) = M0.M1.M2.M4 \rightarrow \prod(0,1,2,4)$$

مثال:

: Express the Boolean function $F = A + B'C$ in a Sum Of Minterms

الحل:

هنالك طريقتان للحل وأنا أرى أن الطريقة الثانية أسهل

الطريقة الأولى :

$$
\begin{aligned}
F &= A + B'C \\
&= A(B+B') + B'C \\
&= AB + AB' + B'C \\
&= AB(C+C') + AB'(C+C') + B'C(A+A') \\
&= ABC + ABC' + AB'C + AB'C' + AB'C + A'B'C \\
&= ABC + ABC' + AB'C + AB'C' + A'B'C
\end{aligned}
$$

الشرح :

في هذا المثال قمنا بإيجاد Sum Of Minterms للدالة $F = A + B'C$

لاحظ عزيزي القارئ أن الدالة تحتوي على 3 متغيرات بغض النظر عن أن المتغير مثبت أم منفي وهي: A,B,C

وكذلك لاحظ أن الدالة مكوّنة من حدين الحد الأول (A) والحد الثاني (B'C)

عندما نريد أن نوجد Sum Of Minterms للدالة نعامل كل حد على حدا

الحد الأول (A) ينقصه المتغيرين C و B نقوم بإضافة هذه المتغيرات الناقصة للحد ولكن لا نستطيع أن نغير في المسألة من تلقاء أنفسنا ونضيف الحدود الناقصة مباشرة لذلك نقوم بالتحايل على المسألة ونضرب في 1 ولنا الحق في اختيار القيمة التي =1 حسب ما نحتاج للتوصل لحل المسالة

لذلك نضرب المتغير (A) في (B+B')

ينتج عن عملية الضرب حدين وهما : (AB) , (AB') نقوم بضربها في (C+C')

وينتج عن عملية الضرب 4 حدود وهي : (ABC) , (ABC') , (AB'C) , (AB'C')

وبالتالي نكون قد أكملنا للحد الأول الحدود الناقصة

ثم ننتقل للحد الثاني وكما تلاحظ ينقص هذا الحد متغير واحد وهو المتغير (A)

ونقوم بعمل نفس الخطوات التي عملناها مع الحد الأول

وبالتالي يصبح لدينا 6 حدود وأخيراً نقوم باختصار الحدود المتكررة كما فعلنا مع الحدود الملونة بالأحمر

الطريقة الثانية :

$$
\begin{aligned}
F &= A + B'C \\
&= [\, ABC + ABC' + AB'C + AB'C' \,] + [\, AB'C + A'B'C \,] \\
&= ABC + ABC' + AB'C + AB'C' + A'B'C
\end{aligned}
$$

الشرح :

هي ليست طريقة مختلفة عن الطريقة الأولى وإنما هي فقط اختصار لخطوات الحل

الحد الأول (A) ينقصه المتغيرين C و B ونقوم بضربه في هذه الحدود مباشرة بكل احتمالاتهما وأقصد أن يكونا: مرة (C و B)مثبتين , ومرة (B) مثبت و(C) منفي , ومرة (B) منفي و(C) مثبت , وأخيراً (C و B) منفيين

الحد الثاني (B'C) ينقصه المتغير A ونعمل معه نفس الخطوات التي قمنا بعملها مع الحد الأول

بعد ذلك نكتب كامل الحدود الناتجة ونختصر الحدود المتكررة كما فعلنا مع الحدود الملونة بالأحمر

مثال :

: Express the Boolean function $F = xy + x'z$ in a Product Of Maxterms from

الحل :

الطريقة الأولى :

$$
\begin{aligned}
F &= xy + x'z \\
&= (x+x'z)(y+x'z) \\
&= (x+x')(x+z)(y+x')(y+z) \\
&= 1(x+z)(y+x')(y+z) \\
&= (x+z)(y+x')(y+z) \\
&= (x+y+z)(x+y'+z)(x'+y+z)(x'+y+z')(x+y+z)(x'+y+z) \\
&= (x+y+z)(x+y'+z)(x'+y+z)(x'+y+z') \\
&= M0 \;.\; M2 \;.\; M4 \;.\; M5 \;=\; \prod(0,2,4,5) = \Sigma(1,3,6,7)
\end{aligned}
$$

الشرح :

في المثال السابق قمنا بإيجاد product of maxterms للدالة $F = xy + x'z$

لحل هذه المسألة سوف نعتمد على القواعد السابقة للروابط AND و OR والتي سبق أن مرت بنا في هذا الفصل وذلك لكي نتمكن من توزيع AND و OR

عند حل هذه المسألة قمنا بتوزيع الحد الأول (xy) على الحد الثاني (x'z) نتج عن عملية التوزيع الحدود التالية $(x+x'z)(y+x'z)$ نعامل كل حد على حدا

نأخذ الحد الأول ونقوم بتوزيعه, ثم نأخذ الحد الثاني ونقوم بتوزيعه أيضاً

تنتج حدود أخرى عن عملية التوزيع ونستمر في توزيع الحدود إلى أن نصل أن يكون كل حد مكوّن من 3 متغيرات بعد ذلك نقوم باختصار الحدود المتكررة كما فعلنا مع الحدود الملونة

الطريقة الثانية :

$$
\begin{aligned}
F &= xy + x'z \\
&= xyz + xyz' + x'yz + x'y'z \\
&= m7 + m6 + m3 + m1 \;=\; \Sigma(1,3,6,7) = \prod(0,2,4,5)
\end{aligned}
$$

الشرح :

كما سبق أن ذكرنا أن Minterms يمثل قيمة الدالة عندما تكون قيمة الدالة = 1

و Maxterms يمثل قيمة الدالة عندما تكون قيمة الدالة = 0 طبعاً لنفس الدالة

إيجاد Sum Of Minterms أسهل من إيجاد Product Of Maxterms

أقصد بذلك أنه لو طلب منك إيجاد Product Of Maxterms قم بإيجاد Sum Of Minterms

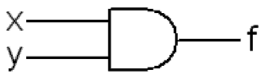
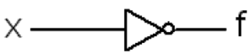
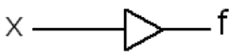
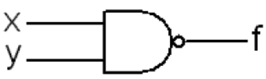
وعند إيجادك لـ Sum Of Minterms تكون قد أوجدت الحدود التي تكون عندها الدالة =1

حيث نتجت هذه الحدود التي تعطي مجموعة الحل هذه $\Sigma(1,3,6,7)$

أذن متممة الحل الذي أوجدناه وهي مجموعة الحل $\prod(0,2,4,5)$ تعطي Product Of Maxterms

بعد ذلك أكتب هذه المجموعة للحل بطريقة Maxterms

: Digital Logic Gates 2-7

Name	Graphic Symbol	Algebraic Function	Truth Table
AND		F = xy	X Y F 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1
OR		F = x+y	X Y F 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1
Inverter		F = x'	X F 0 1 1 0
Buffer		F = x	X F 0 0 1 1
NAND		F = (xy)'	X Y F 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0
NOR		F = (x+y)'	X Y F 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0

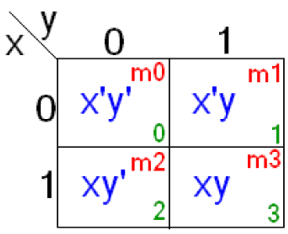
<table>
<tr><th>Name</th><th>Graphic Symbol</th><th>Algebraic Function</th><th>Truth Table</th></tr>
<tr><td>XOR</td><td>
</td><td>$F = xy' + x'y$
$= x \oplus y$</td><td><table><tr><th>X</th><th>Y</th><th>F</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>XNOR</td><td>
</td><td>$F = xy + x'y'$
$= (x \oplus y)'$</td><td><table><tr><th>X</th><th>Y</th><th>F</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
</table>

3-1 مقدمة :

في هذا الفصل سوف نتحدث عن كيفية تبسيط الدوال (Functions) بواسطة (Karnaugh Map) وسوف نتعرف عن أشكال Karnaugh Map وكيفية استخدامها

3-2 طريقة الخريطة Map Method :

X	Y	Minterms	
0	0	x'y'	m0
0	1	x'y	m1
1	0	xy'	m2
1	1	xy	m3



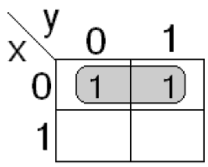
الشكل السابق يوضح الشكل العام لـ Karnaugh Map لمتغيرين
X لها قيمتين(0,1) وكذلك Y لها نفس القيم
تقاطع قيم X مع قيم Y تكون قيم هذه الخريطة
X يمثل الجانب العمودي بينما Y يمثل الجانب الأفقي

مثال :

بسط الدالة المنطقية التالية Simplify the following Boolean function :

$F(x,y) = x'y + x'y'$

الحل :



$F(x,y) = x'$

الشرح :

في هذا المثال قمنا بتبسيط الدالة $x'y + x'y'$ وكما تلاحظ عزيزي القارئ الدالة مكوّنة من حدين

الحد الأول $(x'y)$ مكوّن من تقاطع العمود X عند القيمة (0) أفقياً مع الصف Y عند القيمة (1)

نضع في المربع الناتج عن عملية التقاطع وهو المربع رقم 1 القيمة (1)

الحد الثاني $(x'y')$ مكوّن من تقاطع العمود X عند القيمة (0) أفقياً مع الصف Y عند القيمة (0)

نضع في المربع الناتج عن عملية التقاطع وهو المربع رقم 0 القيمة (1)

وبالتالي نكون قد انتهينا من الخطوة الأولى وهي تعبئة المربعات التي تمثل الدالة بالقيمة (1)

والآن ننتقل للخطوة الثانية وهي اختيار المربعات ومن ثم تبسيط الدالة :

لدينا المربعين 0 و 1 يحتويان على القيمة (1) وبما أنهما بجانب بعضهما نختارهما معاً لكي نبسط الدالة

ولا نأخذ كل مربع بمفرده لأن الأولوية نأخذ 16 مربع إن لم نستطع نأخذ 8 إن لم نستطع نأخذ 4 إن لم نستطع نأخذ مربعين وأخيراً إن لم نستطع نأخذ مربع واحد

نتدرج حسب هذا التسلسل ولا ننتقل من أولوية إلى الأخرى إلى إذا عجزنا تماماً وإلا سوف يكون تبسيطنا للدالة خاطئ

أصبح الآن لدينا مستطيل مكوّن من المربعين 0 و 1

ولكي نتمكن من تبسيط الدالة ننظر أولاً ماذا يمثل هذا المستطيل بالنسبة للجانب العمودي (X)

وكما نعلم أن لــ (X) قيمين : 0 وتعني X' , 1 وتعني X

وعند التبسيط لابد أن تكون قيم (X) متشابهة وأقصد إما أن تكون كلها 0 أو كلها 1

أما إذا كانت مختلفة فإننا نشطب (X) ولا يكون له وجود في الحل تماماً مثل ماحدث مع (Y)

وذلك لأن المستطيل المكوّن للدالة واقع تحت قيمتين مختلفتين للجانب الأفقي (Y)

ناتج عملية التبسيط = X' وذلك لأن المستطيل المكوّن للدالة واقع تحت قيمة متشابهة للجانب العمودي (X) وهي القيمة 0

مثال :

بسط الدالة المنطقية التالية Simplify the following Boolean function :

$F(x,y) = xy + x'y$

الحل :

x \ y	0	1
0		1
1		1

$F(x,y) = y$

الشرح :

في هذا المثال قمنا أولاً بتعبئة المربعات التي تمثل الدالة بالقيمة (1)
ثم انتقلنا لعملية التبسيط وكما تلاحظ عزيزي القارئ أنه حدث العكس تماماً عن المثال السابق
حيث أن المتسطيل المكوّن للدالة واقع تحت قيمة متشابهة للجانب الأفقي (Y) وهي القيمة 1
لذلك كان ناتج عملية التبسيط Y =

مثال :

بسط الدالة المنطقية التالية Simplify the following Boolean function :

$F(x,y) = x'y' + xy' + xy$

الحل :

x \ y	0	1
0	1	
1	1	1

$F(x,y) = x + y'$

الشرح:

في هذا المثال قمنا أولاً بتعبئة المربعات التي تمثل الدالة بالقيمة (1)
ثم انتقلنا لتبسيط الدالة وكما تلاحظ أنه لدينا 3 مربعات تحتوي على القيمة (1) وهي 0 و 2 و 3
وعند عملية تكوين أول مستطيل ننظر أولاً إلى الـ 1 البعيد
وكما تلاحظ أن الـ 1 الواقع في المربع رقم 3 تجد نفسك مجبراً على اختياره مع الـ 1 الواقع في المربع رقم 2
وكذلك الحال ينطبق مع الـ 1 الواقع في المربع رقم 0
أما لو نظرت إلى الـ 1 الواقع في المربع رقم 2 تستطيع اختياره إما مع المربع رقم 0 أو المربع رقم 3

في خريطة متغييرين موضوع اختيار المربعات سهل أما في خريطة 3 متغيرات و 4 متغيرات
سوف يصبح الموضوع أكثر تعقيداً لذلك وجب التنويه عن هذه النقطة لأهميتها

هنالك نقطة أخرى مهمة وهي أنك تستطيع استخدام المربع أكثر من مرة لتكوين مستطيل الدالة إذا دعت الحاجة
لاستخدامه أكثر من مرة كما فعلنا مع المربع رقم 2

بالتالي نكون قد كوّنا المستطيلات التي تمثل الدالة ونكمل باقي الحل كما تعلمنا من الأمثلة السابقة

مثال :

بسط الدالة المنطقية التالية Simplify the following Boolean function :

$F(x,y) = xy + x'y + xy' + x'y'$

الحل :

x \ y	0	1
0	1	1
1	1	1

$F(x,y) = 1$

الشرح :

في هذا المثال عند تبسيطنا لهذه الدالة تمكنا من اختيار 4 مربعات معاً

وإذا أخذنا جميع المربعات المكوّنة للخريطة يكون ناتج عملية التبسيط = 1

3-3 خريطة 3 متغيرات 3 Variables Map :

x \ yz	00	01	11	10
0	m0 x'y'z' 0	m1 x'y'z 1	m3 x'yz 3	m2 x'yz' 2
1	m4 xy'z' 4	m5 xy'z 5	m7 xyz 7	m6 xyz' 6

الشكل السابق يوضح الشكل العام لـ Karnaugh Map لـ 3 متغيرات

(X) يمثل الجانب العمودي بينما (YZ) تمثل الجانب الأفقي

توجد ملاحظات مهمة وهي :

1- ترتيب المربعات مختلف عن المعتاد حيث أن بعد المربع رقم 1 يأتي المربع رقم 3 ثم المربع رقم 2 وكذلك المربع رقم 5 ثم المربع رقم 7 ثم المربع رقم 6 ، أي أن الترتيب غير تسلسلي

2- شكل الخريطة ليس مستطيلاً وإنما يشبه الأسطوانة وأقصد أن المربع رقم 0 ملاصق للمربع رقم 2 وكذلك المربع رقم 4 مع المربع رقم 6 وهذا يعني أنه لو كان لدينا المربعان 0 و 2 يحتويان على القيمة (1) نستطيع أخذهما معاً لتكوين مستطيل وذلك لأنهما بجانب بعضهما وكذلك الحال بالنسبة للمربعين 4 و 6

مثال :
بسط الدالة المنطقية التالية Simplify the following Boolean function :

$F(x,y,z) = \Sigma(3,4,6,7)$

الحل :

x \ yz	00	01	11	10
0			1	
1	1		1	1

$F(x,y,z) = xz' + yz$

الشرح :
في هذا المثال تغيرت صيغة السؤال حيث أنه أعطانا المربعات التي تحتوي على القيمة (1)
بينما في السابق كان يعطينا حدود الدالة , وبلا شك فإن الصيغة الجديدة أسهل من السابقة

قمنا أولاً بتعبئة المربعات بالقيمة (1) ومن ثم تكوين المستطيلات
وتبقى كتابة الحدود الناتجة عن عملية التبسيط

نأخذ المستطيل الأول المكوّن من المربعين 4,6 وننظر أولاً ماذا يمثل بالنسبة للجانب العمودي (X)
ونلاحظ أن قيمة (X) لا تتغير مع هذا المستطيل حيث أن قيمته = 1 ونكتب في الناتج X

ثم ننظر ماذا يمثل المستطيل بالنسبة للجانب الأفقي (Y,Z) , ونعامل كلاً منهما على حدا

ننظر أولاً ماذا يمثل بالنسبة لـ (Y)
ونلاحظ أن قيمة (Y) اختلفت مرة 0 ومرة 1 لذلك نشطب (Y) ولا نكتبه في الناتج لأن قيمته مختلفة
ثم ننظر للمتغير (Z) ونلاحظ أن قيمة (Z) متشابهة حيث أنها = 0 لذلك نكتب في الناتج Z'

وبذلك يكون قد إنتهينا من أول مستطيل وإستنتجنا أول حد وهو XZ'

ثم ناخذ المستطيل الثاني المكوّن من المربعين 3,7 ونعمل معه مثل ما عملنا مع المستطيل السابق تماماً
وسوف ينتج لنا الحد الثاني وهو YZ
ثم بعد ذلك نكتب ناتج عملية التبسيط ونربط بين الحدين بعلامة +
ناتج عملية التبسيط = XZ' + YZ

مثال :

بسط الدالة المنطقية التالية Simplify the following Boolean function :

$F(x,y,z) = \Sigma(0,1,2,4.5,6)$

الحل :

x \ yz	00	01	11	10
0	1	1		1
1	1	1		1

$F(x,y,z) = y' + yz'$

مثال :

Given the Boolean function :

$F(A,B,C) = A'C + A'B + AB'C + BC$

1- Express it in Sum Of Minterms

2- Find the minimal Sum Of Products expression

الحل :

A \ BC	00	01	11	10
0		1	1	1
1		1	1	

1- $F(A,B,C) = \Sigma(1,2,3,5,7)$

2- $F(A,B,C) = C + A'B$

الشرح :

في هذا المثال قمنا أولاً بتعبئة المربعات التي تمثل الدالة بالقيمة (1)

ثم أوجدنا Sum Of Products ويمثل المربعات التي تحتوي على القيمة (1)

وأخيراً قمنا بتكوين المربعات والمستطيلات التي تمثل الدالة ومن ثم تبسيطها

3-4 خريطة 4 متغيرات 4 Variables Map :

wx \ yz	00	01	11	10
00	m0 w'x'y'z' 0	m1 w'x'y'z 1	m3 w'x'yz 3	m2 w'x'yz' 2
01	m4 w'xy'z' 4	m5 w'xy'z 5	m7 w'xyz 7	m6 w'xyz' 6
11	m12 wxy'z' 12	m13 wxy'z 13	m15 wxyz 15	m14 wxyz' 14
10	m8 wx'y'z' 8	m9 wx'y'z 9	m11 wx'yz 11	m10 wx'yz' 10

الشكل السابق يوضح الشكل العام لـ Karnaugh Map لـ 4 متغيرات
الجديد في الأمر زيادة متغير جديد وهو (W) ليمثل مع (X) الجانب العمودي
ترتيب المربعات غير متسلسل
شكل الخريطة ليس مربع وإنما يشبه المكعب
وأقصد أن المربعات متصلة مع بعضها من الجانبين ومن الأعلى والأسفل
ولو أخذنا على سبيل المثال المربع رقم 0 نجد أنه مجاور للمربعات 2 و 8 و 10

مثال:

بسط الدالة المنطقية التالية Simplify the following Boolean function :

$F(w,x,y,z) = \Sigma(0,1,2,4,5,6,8,9,12,13,14)$

الحل:

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1	1		1
11	1	1		1
10	1	1		

$F(w,x,y,z) = y' + w'z' + xz'$

الشرح:

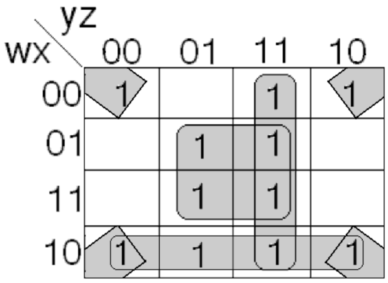
لاتختلف طريقة تبسيط 4 متغيرات عن تبسيط 3 متغيرات و متغيرين
لاحظ فقط في هذا المثال أننا تمكنا من اختيار 8 مربعات معاً

مثال:

بسط الدالة المنطقية التالية Simplify the following Boolean function :

$$F(w,x,y,z) = \Sigma(0,2,3,5,7,8,9,10,11,13,15)$$

الحل:



$$F(w,x,y,z) = wx' + yz + xz + x'z'$$

لاحظ أنه يمكننا اختيار المربعات الموجودة في الأركان وذلك لأنها مربعات متجاورة

3-5 Don't Care Conditions :

مثال :

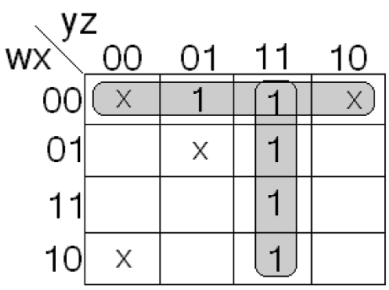
بسط الدالة المنطقية التالية Simplify the following Boolean function :

$$F(w,x,y,z) = \Sigma(1,3,7,11,15)$$

Which has the Don't Care conditions

$$d(w,x,y,z) = \Sigma(0,2,5,8)$$

الحل :



$F(w,x,y,z) = w'x' + yz$

الشرح :

في المثال السابق نلاحظ شي جديد وهو(Don't Care) ويرمز له بالرمز (x)
نستفيد من Don't Care أنها تساعدنا في الحل
ولكن لا يتوجب علينا تغطية المربعات التي تحتوي على(x) بالكامل, ولكن إذا احتجنا لاستخدامها نستخدمها
عكس المربعات التي تحتوي على قيمة (1) فإنه يتوجب عليك تغطيتها بالكامل وإلا فإن حلك خاطئ

قمنا أولاً بتعبئة المربعات بقيم (1) ومن ثم تعبئتها بقيم (x)
ثم قمنا بتكوين المستطيلات التي تعطينا قيمة الدالة , نتج لدينا مستطيلين
المستطيل الأول المستطيل العمودي المكوّن من المربعات 3,7,15,11
وهذا المستطيل طريقة تبسيطه مثل الأمثلة السابقة ولن نتطرق إليه

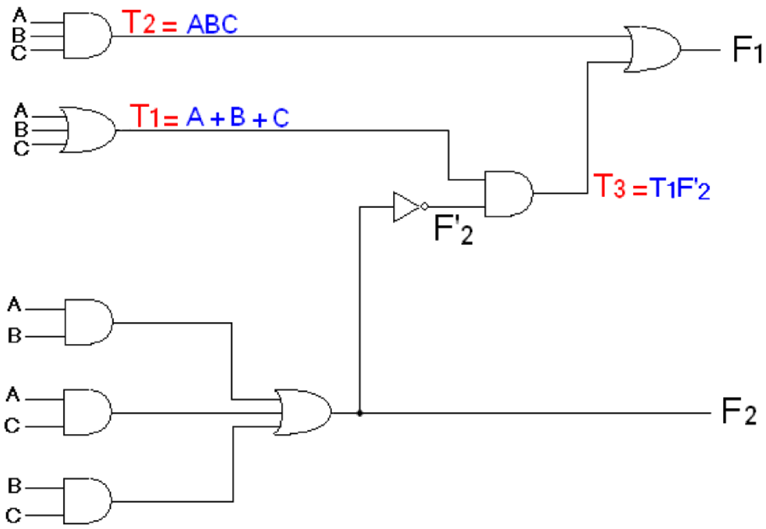
المستطيل الآخر المستطيل الأفقي المكوّن من المربعات 0,1,3,2 وهو محور حديثنا
لو أنه لم يوجد Don't Care كنا أخذنا المربعين 1,3 وأصبح الحل معقد بعض الشي
وبما أنه يوجد Don't Care فإنها سوف تساعدنا في الحصول على مستطيل أكبر
وكلما كان المستطيل أكبر كان الحل أكثر اختصاراً

عند وجود Don't Care يتوجب عليك استخدامها إذا احتجت إليها ولا يجب عليك تغطيتها بالكامل
وكما تلاحظ عزيزي القارئ تجاهلنا Don't Care الموجودة في المربعين 5,8 وذلك لعدم حاجتنا إليها
بعد ذلك نكمل باقي خطوات الحل كما تعلمنا سابقاً

4-1 مقدمة :

في هذا الفصل سوف نتحدث عن تحليل الدوال (Analysis) وإيجاد مخرجاتها
وكذلك سوف نتحدث عن تصميم الدوال وحل مسائل التصميم (Design)
كما سوف نتعرف على بعض الدوائر و هي :
Half Adder ، Full Adder ، Decoder ، Multiplexer
وسوف نناقشها من حيث :
تعريفها وأشكالها وأنواعها أقسامها وعملها و حل المسائل بواسطتها

4-2 إجراء التحليل Analysis Procedure :



الحل :

المطلوب إيجاد مدخلات وحدود الدالتين F1 و F2
وكما تلاحظ عزيزي القارئ أن عدد المدخلات كثير وربما أنك تنسى كتابة حد أو متغير أثناء قيامك بكتابة حدود كل دالة ولتفادي هذه المشكلة نقوم بتجزئة الدائرة إلى عدة أجزاء ومن ثم نحدد نوجد مخرجات كل جزء على حدا
بعد ذلك نقوم بكتابة مخرجات الدالتين المطلوبة كما في التالي :

$T_1 = A + B + C$

$T_2 = ABC$

$F_2 = AB + AC + BC$

$T_3 = T_1F'_2$

$= (A+B+C)(AB+AC+BC)'$

$= (A+B+C)(A'+B')(A'+C')(B'+C')$

$F_1 = T_2 + T_3$

4-3 إجراء التصميم Design Procedure :

خطوات إجراء التصميم (Design Procedure) :

1- تحديد مدخلات ومخرجات الدائرة
2- إنشاء Truth Table لمدخلات ومخرجات الدائرة
3- تبسيط مخرجات الدائرة (Simplify)
4- رسم Diagram لمخرجات الدائرة بعد تبسيطها

مثال :

Design a combinational circuit that converts the Binary Coded Decimal (BCD)
The excess-3 code for the Decimal digit

الحل :

1و2 - تحديد المدخلات والمخرجات وإنشاء Truth Table :

المطلوب تصميم دائرة تحول التشفير الثنائي إلى العشري (BCD) وذلك بزيادة 3 على العدد العشري
نقوم أولاً بتعبئة أعمدة المدخلات (Inputs) وهي الأعمدة (A,B,C,D) بالطريقة المعتادة
ننتقل الآن لتعبئة أعمدة المخرجات (Outputs) وهي الأعمدة (W,X,Y,Z)
ولتعبئتها نقوم بجمع القيمة (3) على كل صف من المدخلات
وينتج لنا في المقابل أعمدة المخرجات
على سبيل المثال الصف الأول :

$$(0000)_2 = (0)_{10} \longrightarrow (0011)_2 = (3)_{10}$$

وكذلك الصف الخامس :

$$(0100)_2 = (4)_{10} \longrightarrow (0111)_2 = (7)_{10}$$

عزيزي القارئ لاحظ أن المدخلات تمثل أعداد عشرية
فعندما تكون قيمة المدخلات أكبر من العدد $(9)_{10} = (1001)_2$ والذي يمثل آخر عدد في النظام العشري
يكون انتقالها في المخرجات إلى Don't Care كما فعلنا من الصف الحادي عشر إلى الصف الخامس عشر

InPuts				OutPuts			
A	B	C	D	W	X	Y	Z
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	x	x	x	x
1	0	1	1	x	x	x	x
1	1	0	0	x	x	x	x
1	1	0	1	x	x	x	x
1	1	1	0	x	x	x	x
1	1	1	1	x	x	x	x

3- تبسيط مخرجات الدائرة (Simplify) :

W

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01		1	1	1
11	X	X	X	X
10	1	1	X	X

W = A + BD + BC

X

AB \ CD	00	01	11	10
00		1	1	1
01	1			
11	X	X	X	X
10		1	X	X

X = BC'D' + B'D + B'C

Y

AB \ CD	00	01	11	10
00	1		1	
01	1		1	
11	X	X	X	X
10	1		X	X

Y = C'D' + CD

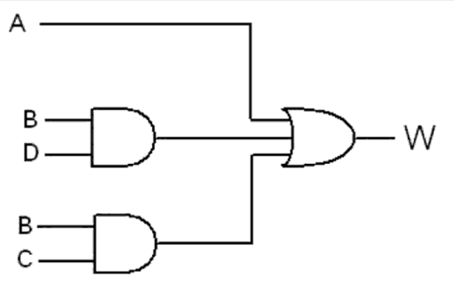
Z

AB \ CD	00	01	11	10
00	1			1
01	1			1
11	X	X	X	X
10	1		X	X

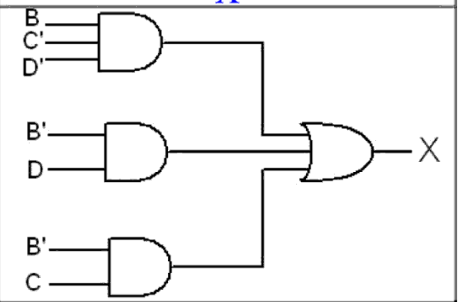
Z = D'

4- رسم Diagram لمخرجات الدائرة بعد تبسيطها :

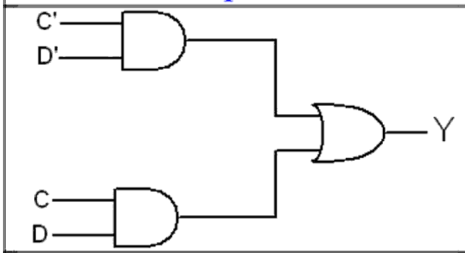
W



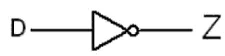
X



Y



Z



مثال :

: Design a 2 - bit binary Multiplier

الحل :

1و2 - تحديد المدخلات والمخرجات وإنشاء Truth Table :

المطلوب تصميم دالة Multiplier , عملها تقوم بضرب قيم المدخلات وتضع الناتج في المخرجات
حيث تعتبر العمودين (A1 , A0) عدد واحد وتقوم بضربه بالعدد الآخر المكوّن من العمودين (B1 , B0)
على سبيل المثال الصف الثالث :

$$(00)_2 = (0)_{10} * (10)_2 = (2)_{10} \longrightarrow (0000)_2 = (0)_{10}$$

وكذلك الصف الثامن :

$$(01)_2 = (1)_{10} * (11)_2 = (3)_{10} \longrightarrow (0011)_2 = (3)_{10}$$

InPuts				OutPuts			
A_1	A_0	B_1	B_0	C_3	C_2	C_1	C_0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0	1

: Simplify -3

C_0

$A_1A_0 \backslash B_1B_0$	00	01	11	10
00				
01		1	1	
11		1	1	
10				

$C_0 = A_0B_0$

C_1

$A_1A_0 \backslash B_1B_0$	00	01	11	10
00				
01			1	1
11		1		1
10		1	1	

$C_1 = A_1'A_0B_1 + A_0B_1B_0' + A_1A_0'B_0 + A_1B_1'B_0$

C_2

$A_1A_0 \backslash B_1B_0$	00	01	11	10
00				
01				
11				1
10			1	1

$C_2 = A_1A_0B_1 + A_1B_1B_0'$

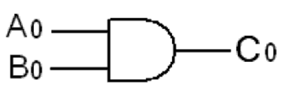
C_3

$A_1A_0 \backslash B_1B_0$	00	01	11	10
00				
01				
11			1	
10				

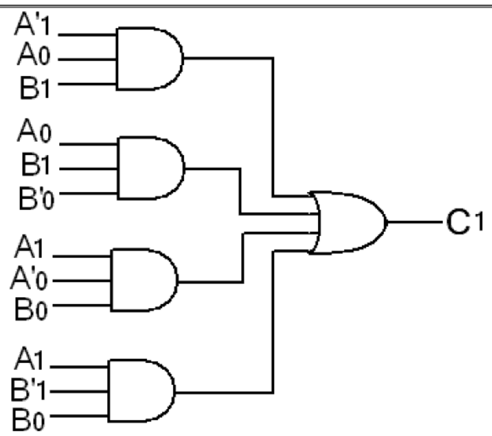
$C_3 = A_1A_0B_1B_0$

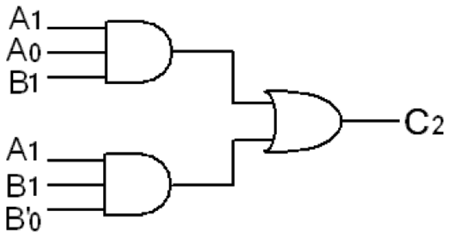
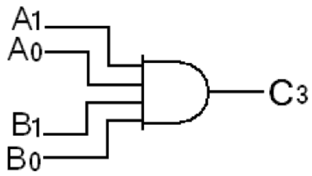
: Diagram -4

C_0



C_1



C_2	C_3
	

مثال :

: Design a 2 - bit Magnitude Comparator

الحل :

1و2 - تحديد المدخلات والمخرجات وإنشاء Truth Table :

المطلوب تصميم دائرة Magnitude Comparator , وعملها تقارن بين قيمة المدخلات حيث تعتبر العمودين (A1,A0) عدد واحد وتقارن قيمته مع العدد الآخر المكوّن من العمودين (B1,B0) هل هي أكبر أم أصغر أم مساوية وتضع النتيجة في المخرجات

InPuts		OutPuts		
A_1 A_0	B_1 B_0	X (A>B)	Y (A<B)	Z (A=B)
0 0	0 0	0	0	1
0 0	0 1	0	1	0
0 0	1 0	0	1	0
0 0	1 1	0	1	0
0 1	0 0	1	0	0
0 1	0 1	0	0	1
0 1	1 0	0	1	0
0 1	1 1	0	1	0
1 0	0 0	1	0	0
1 0	0 1	1	0	0
1 0	1 0	0	0	1
1 0	1 1	0	1	0
1 1	0 0	1	0	0
1 1	0 1	1	0	0
1 1	1 0	1	0	0
1 1	1 1	0	0	1

: Simplify -3

X

A_1A_0 \ B_1B_0	00	01	11	10
00				
01	1			
11	1	1		1
10	1	1		

$X = A_1B'_1 + A_1A_0B'_0 + A_0B'_1B_0$

Y

A_1A_0 \ B_1B_0	00	01	11	10
00		1	1	1
01			1	1
11				
10			1	

$Y = A'_1B_1 + A'_0B_1B_0 + A'_1A'_0B_0$

Z

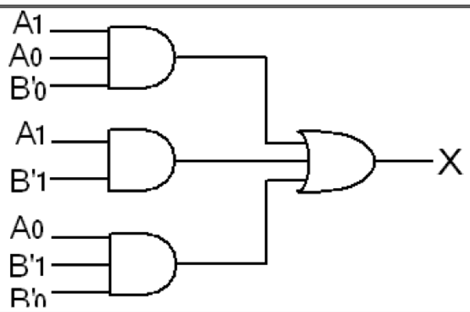
A_1A_0 \ B_1B_0	00	01	11	10
00	1			
01		1		
11			1	
10				1

$Z = A'_1A'_0B'_1B'_0 + A'_1A_0B'_1B_0 + A_1A_0B_1B_0 + A_1A'_0B_1B'_0$ (A حل)

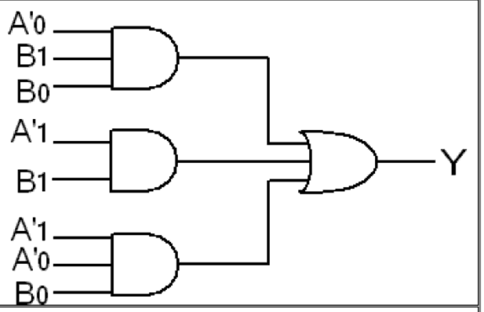
$= A_1 \oplus A_0 \oplus B_1 \oplus B_0$ (B حل)

4- Diagram :

X

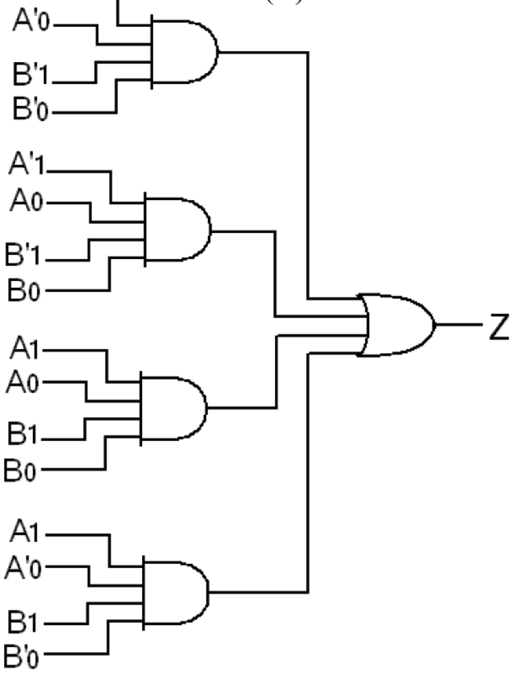


Y

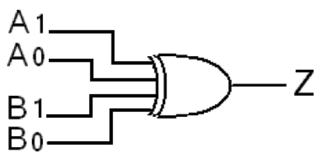


Z

شكل(A)



شكل(B)



Half Adder & Full Adder 4-4 :

تستخدم هذه الدالتين للقيام بعمليتي الجمع و الطرح

Half Adder -1 :

Truth Table

InPuts		OutPuts	
X	Y	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

(S) إختصار لكلمة (Sum) وفي هذه العمود من الجدول نضع قيمة جمع كل صف من المدخلات أي X+Y

(C) إختصار لكلمة (Carry)، وإذا وجد Carry نضع في هذه الخانة 1 وإذا لم يوجد نضع 0 ويوجد Carry إذا كان حاصل جمع X+Y أكبر من 1 كما في آخر صف في الجدول

Algebraic Function

(A)

$S = xy' + x'y$

$C = xy$

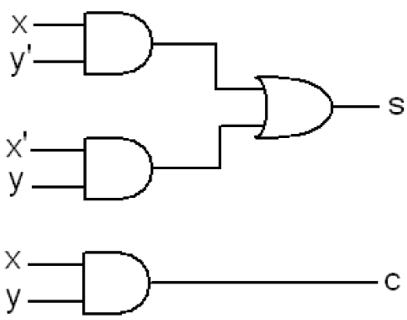
(B)

$S = x \oplus y$

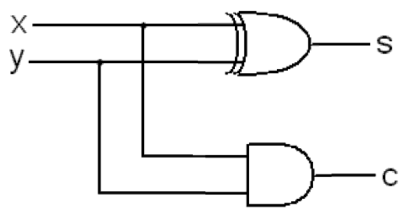
$C = xy$

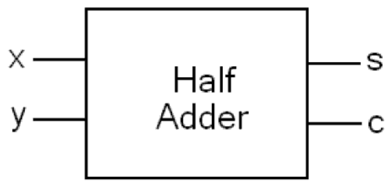
Graphic Symbol

شكل(A)



شكل(B)





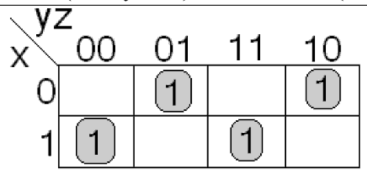
: Full Adder -2

Truth Table

InPuts			OutPuts	
X	Y	Ci	Co	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

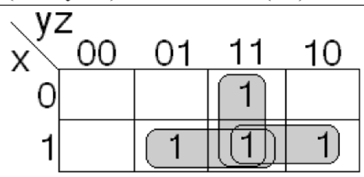
(Carry out) إختصار لكلمة (Co) ، (Carry in) إختصار لكلمة (Ci)

Algebraic Function



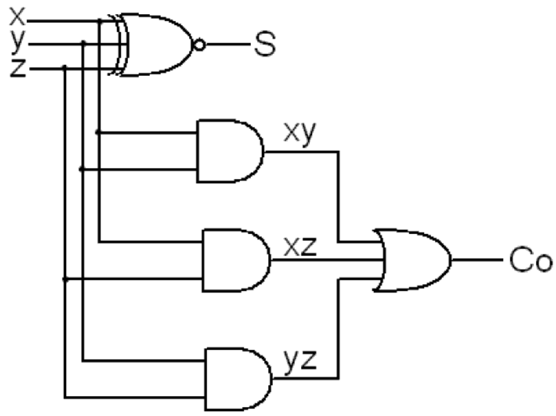
$S = x'y'z + x'yz' + xy'z' + xyz$

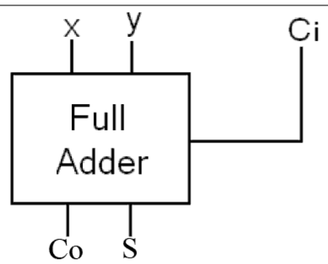
$= x \oplus y \oplus z$



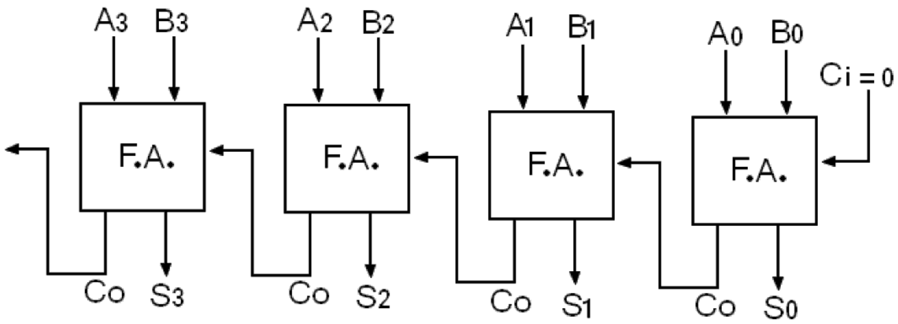
$C = xy + xz + yz$

Graphic Symbol





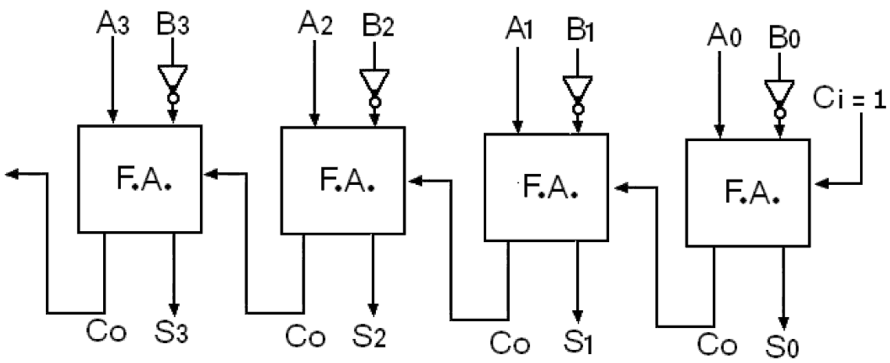
مثال :
: Design a 4 - bit Full Adder
الحل :
المطلوب تصميم دائرة Full Adder تستقبل 4-bit لتقوم بعملية الجمع



شكل مبسط يوضح ما الذي يحدث :

$$\begin{array}{cccc} & & & 0 \\ A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \\ B_3 & B_2 & B_1 & B_0 \; + \\ \hline \end{array}$$

مثال :
: Design a 4 - bit full subtractor using Full Adder and additional gates
الحل :
المطلوب تصميم دائرة Full Adder تستقبل 4-bit لتقوم بعملية الطرح
وللقيام بعملية الطرح نحتاج إلى Two's Complement



العملية التالية توضح ما الذي يحدث :

= A + (B' + 1)
= A + (2's Comp of B)
= A - B

4-5 Decoder :

A Decoder has n inputs and 2^n outputs

هذه الدالة مدخلاتها = n ومخرجاتها = 2^n أي 2 أس(قوى) عدد المدخلات

على سبيل المثال

لو كان عدد المدخلات = 2 فإن عدد المخرجات = 2^2 = 4

كذلك لو كان عدد المدخلات = 3 فإن عدد المخرجات = 2^3 = 8

بالتالي فإن نوع وشكل Decoder يعتمد على عدد مدخلاته

1- Decoder 2 * 4 (Has 2 inputs and 4 outputs) :

Truth Table

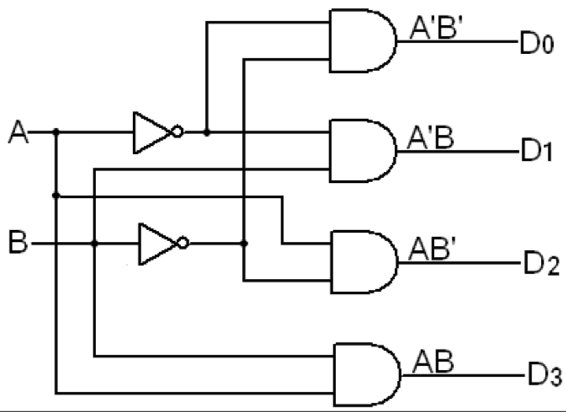
InPuts		OutPuts			
A	B	D_3	D_2	D_1	D_0
0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

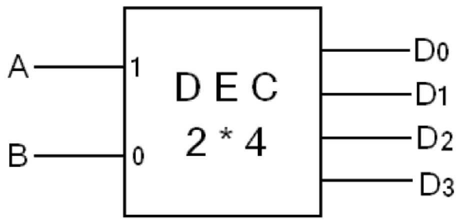
كل صف من المدخلات (A,B) يكوّن رقم

إذا كان الرقم المكوّن = 0 نضع في الخانة D_0 القيمة (1) وباقي الخانات القيمة (0)

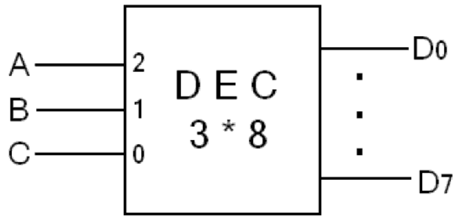
وإذا كان الرقم المكوّن = 1 نضع في الخانة D_1 القيمة (1) , وهكذا

Graphic Symbol

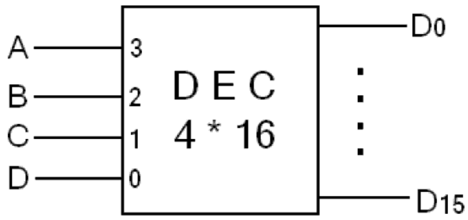




: Decoder 3 * 8 -2



: Decoder 4 * 16 -3

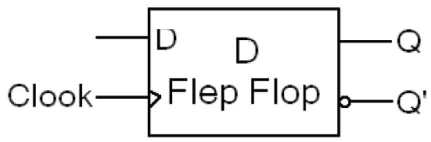


5-1 المقدمة :

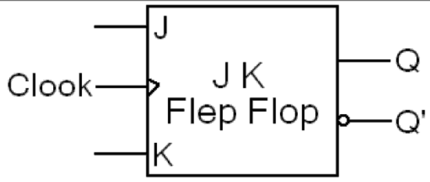
في هذا الفصل سوف نتحدث عن دائرة (Flip Flop)
وسوف نناقشها من حيث تعريفها وأشكالها وأنواعها وأقسامها وعملها وحل المسائل بواسطتها
كما سوف نتحدث عن Analysis Of Clocked Sequential Circuits
كذلك سوف نتحدث عن State Reduction And Assignment
وأخيراً سوف نتحدث عن إجراء التصميم (Design Procedure)

5-2 أنواع الـ Types Of Flip Flop :

1- D Flip Flop :

<table>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>Characteristic Table</td><td>
<table>
<tr><th>D</th><th>Q(t+1)</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
هذا الجدول يوضح كيفية تكوين العمود Q(t+1)
كما تلاحظ عزيزي القارئ أن Q(t+1) = D
</td></tr>
<tr><td>Truth Table</td><td>
<table>
<tr><th colspan="2">Presnt State</th><th>Next State</th></tr>
<tr><th>D</th><th>Q(t)</th><th>Q(t+1)</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
يعتمد تكوين هذا الجدول على جدول CharacteristicTable
</td></tr>
<tr><td>Characteristic Equation</td><td>
<table>
<tr><th>D \ Q(t)</th><th>0</th><th>1</th></tr>
<tr><td>0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
Q(t+1) = D
</td></tr>
<tr><td>Excitation Table</td><td>
<table>
<tr><th>Q(t)</th><th>Q(t+1)</th><th>D</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
هذا الجدول يوضح باختصار مايلي :
عندما ننتقل من Q(t) إلى Q(t+1) كم تصبح قيمة D
</td></tr>
</table>

: J K Flip Flop -2



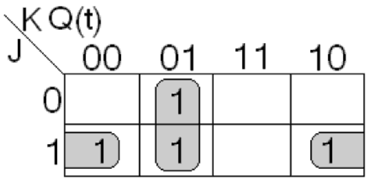
Characteristic Table

J	K	Q(t+1)
0	0	Q(t)
0	1	0
1	0	1
1	1	Q'(t)

Truth Table

Presnt State			Next State
J	K	Q(t)	Q(t+1)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Characteristic Equation

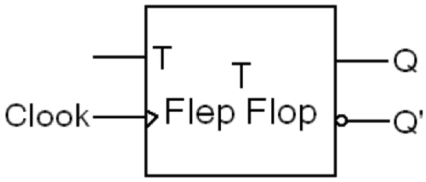


Q(t+1) = JQ'(t) + K'Q(t)

Excitation Table

Q(t)	Q(t+1)	J	K
0	0	0	X
0	1	1	X
1	0	X	1
1	1	X	0

: T Flip Flop -3



Characteristic Table

T	Q(t+1)
0	Q(t)
1	Q'(t)

Truth Table

Presnt State		Next State
T	Q(t)	Q(t+1)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Characteristic Equation

T \ Q(t)	0	1
0		1
1	1	

$$Q(t+1) = T'Q(t) + TQ'(t) \quad = \quad T \oplus Q(t)$$

Excitation Table

Q(t)	Q(t+1)	T
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0